Sunto. Esporremo alcuni risultati di Coffman-Marcus [CM] e di Benci-Cerami [BC] sull'esistenza di soluzioni positive del problema di Dirichlet

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

dove $\lambda > 0$, Ω è un dominio esterno di R^n, $n \geq 3$, e $f: R \to R$ è una funzione continua, opportuna, tale che $f(u) = o(u)$ per $u \to o$.

§ 1. PRELIMINARI. ITERAZIONE MONOTONA. Chiamiamo *dominio esterno di* R^n ogni aperto Ω di R^n tale che $R^n \setminus \Omega$ è compatto. Supporremo sempre

$$0 \in \text{int}\,(R^n \setminus \Omega).$$

In questo paragrafo, e nel successivo, supporremo inoltre

$$\partial\Omega \in C^{2,\alpha} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1.$$

Sia Γ la soluzione fondamentale in R^n dell'operatore $-\Delta + 1$. Allora, se $n \geq 3$,

$$(1.1) \qquad \Gamma(x) = |x|^{-\frac{n-2}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(|x|)$$

dove $K_{\frac{n-2}{2}}$ indica la funzione di Bessel modificata di ordine $\frac{n-2}{2}$. In particolare

$$(1.3)\qquad \begin{cases} K_{\frac{n-2}{2}}(x) \quad |x|^{-1/2}\, e^{-|x|}, & \text{per } |x|\to+\infty, \\ K_{\frac{n-2}{2}}(x) \cong |x|^{-\frac{n-2}{2}}, & \text{per } |x|\to o. \end{cases}$$

Per ogni $x \in \Omega$ indichiamo ora con h_x la soluzione del problema di Dirichlet (esterno)

$$(-\Delta+1)h = 0 \text{ in } \Omega$$

$$h(y) = \Gamma(x-y) \quad y \in \partial\Omega, \quad h(y) \to 0 \text{ per } |y|\to+\infty$$

Allora $h \in C^{\infty}(\Omega) \cap C^{2,\alpha}_{loc}(\bar{\Omega})$ e

$$h_x(y) = O(\Gamma(x-y)) \text{ per } |x-y|\to+\infty$$

La funzione

$$G(x,y) = \Gamma(x-y)-h_x(y) \quad , \quad x,y \quad \Omega \quad , \quad x \neq y$$

è la funzione di Green di Ω. Se $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$, posto $v = -\Delta u+u$ si ha

$$(1.4)\qquad u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)v(y)dy.$$

Ovviamente $0 \leq G \leq \Gamma$ e quindi

$$G(x,y) = O(|x-y|^{-\frac{n-1}{2}}\, e^{-|x-y|}) \text{ per } |x-y|\to+\infty.$$

Inoltre

$$G(x,y) \cong |x-y|^{-(n-2)} \quad \text{per} \quad |x-y| \to 0 \quad , \quad x \in \Omega.$$

Estendiamo ora G all'intero spazio $R^n x R^n$ ponendo

$$(1.5) \qquad G(x,y) = G(y,x) = 0 \quad \text{per} \quad y \notin \bar{\Omega}$$

Consideriamo lo spazio (di Banach)

$$(1.6) \qquad Y = \{u \in C(R^n,R) / \lim_{|x| \to +\infty} e^{|x|/2} u(x) = 0\}$$

con la norma

$$(1.7) \qquad \|u\|_Y = \sup_{x \in R^n} e^{|x|/2} |u(x)|$$

Calcoli standard provano che l'operatore

$$(1.8) \qquad (Gu)(x) = \int_{R^n} C(x,y)u(y)dy$$

applica Y in sé ed è *compatto.* Inoltre, per ogni $u \in Y$,

$$G(u) \in C^{0,1}(R^n) \quad e \quad (Gu)(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Inoltre, se $u \in C^{\alpha}_{loc}(\bar{\Omega})$ allora $Gu \in C^{2,\alpha}_{loc}(\bar{\Omega})$.

Consideriamo ora il problema di Dirichlet

$$(1.9) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = g(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega \quad , & u \in Y \end{cases}$$

dove $g:R^n xR \to R$ è *localmente* α*-hölderiana* in x e *localmente lipschitziana* in u, uniformemente in x.

Inoltre

$$g(x,y) = O(u) \text{ per } u\to 0, \text{ uniformemente in } x.$$

Utilizzando l'operatore G definito in (1.6), il problema (1.9) si può trattare seguendo lo schema di *iterazione monotona* usato da Sattinger ([S]) nel caso di domini limitati.

Una funzione $\phi \in C^2(\Omega)\cap C^{\alpha}_{loc}(\bar{\Omega})$ Y, $0<\alpha<1$, è una *sopra soluzione* di (1.9) se risulta

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi \geq g(\phi) \text{ in } \Omega \\ \phi \geq 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Analogamente, sostituendo $\geq$ con $\leq$, si definisce la nozione di *sottosoluzione* di (1.9).

Teorema 1.1. Se esistono, per il problema (1.9), una soprasoluzione ϕ ed una sottosoluzione ψ tali che

$$\psi \leq \phi,$$

allora (1.9) ha una soluzione $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\bar{\Omega})\cap Y$ tale che

$$\psi \leq u \leq \phi$$

Dimostrazione. Per ogni $u \in Y\cap C^{\alpha}_{loc}(\bar{\Omega})$ poniamo

$$(Tv)(x) = \int_{R^n} G(x,y)g(y,u(y))dy$$

Supponiamo ora $g(x,\cdot)\nearrow$. Allora, se $\psi \leqq u \leqq \phi$, risulta

$$(1.10) \qquad T\psi \leqq Tv \leqq T\phi \quad \text{in } \Omega$$

Infatti:

$$(-\Delta+1)(\phi) \geqq g(x,\phi) \text{ in } \Omega, \quad \phi \geqq 0 \text{ su } \partial\Omega$$

$$(-\Delta+1)(Tu) = g(x,\phi) \text{ in } \Omega, \quad Tu = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

e quindi

$$(-\Delta+1)(\phi-Tu) \geqq 0 \text{ in } \Omega, \quad (\phi-Tu) \geqq 0 \text{ su } \partial\Omega.$$

D'altra parte, essendo ϕ, $Tu \in Y$,

$$(\phi-Tu)(x) \to 0 \quad \text{per } |x| \to +\infty$$

Per il principio di massimo ne viene che $\phi-Tu \geqq 0$ in Ω. Analogamente si prova che $\psi-Tu \leqq 0$ in Ω.

Definiamo ora una successione (v_k) nel modo seguente:

$$v_1 = T\phi$$

$$v_{k+1} = Tv_k \quad , \quad k = 1,2,\ldots$$

Dalla (1.10), per induzione, si ricava

$$\psi \leqq v_{k+1} \leqq v_k \leqq \phi \text{ in } \Omega, \quad k \; N.$$

Per le proprietà di compattezza di G è facile provare ora che (v_k) converge in

Y ad una funzione $v \in Y$.

Allora, da $v_{k+1} = Tv_k$, si ricava

$$v(x) = \int_{R^n} G(x,y)g(y,v(y))dy \tag{1.11}$$

Questo implica $v \in C^{0,1}(R^n)$ e, quindi, $v \in C^{2,\alpha}_{loc}(\bar{\Omega})$. Di conseguenza, ancora per la (1.11),

$$(-\Delta+1)\ (x) = g(x,v(x)) \text{ in } \Omega \quad , \quad v = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Questo prova il teorema nel caso di g crescente in u. In generale basta studiare il problema

$$(-\Delta+1+L)v = (g(x,v)+L)v$$

con $L = \sup\{\frac{|g(x,u)-g(x,v)|}{|u-v|} /\ x \in \bar{\Omega}\ ,\ \ u \neq v,\ \psi \leq u,v \leq \phi\}$.

<u>Osservazione</u>. Se $f(u) \leq g(x,u) \leq \bar{f}(u)$, ogni soluzione *positiva* u del problema

$$\begin{cases} -\Delta u+u = \bar{f}(u) & \text{in } R^n \\ u \in Y \end{cases} \tag{1.12}$$

è una soprasoluzione di (1.9).

In linea di principio, per determinare sottosoluzioni di (1.9) si può procedere nel modo seguente.

Supponiamo

$$\bar{\Omega} \subseteq \{x \subset R^n / |x| > R\} \equiv \Omega_R$$

e, per ogni $m \in R$, $m \leq 0$, consideriamo il problema

$$(1.13)\qquad \begin{cases} -\Delta u+u = f(u) \\ \\ u = m \quad \text{su} \quad \partial\Omega_R \quad , \quad u \in Y \end{cases}$$

Evidentemente ogni soluzione di (1.13) è una sottosoluzione di (1.9) se risulta $u \leq 0$ su $\partial\Omega$.

Si può allora pensare che, se

$$\partial\Omega \subset \{x \in R^n \ / \ R<|x|<R+\delta\}$$

e se δ è convenientemente piccolo, esistano delle costanti $m \leq 0$ tali che le (eventuali) soluzioni di (1.13) verificano la condizione $u\leq 0$ su $\partial\Omega$.

§ 2. SOLUZIONI POSITIVE IN DOMINI ESTERNI QUASI-SFERICI. In questo paragrafo esporremo i risultati di Coffman e Marcus [CM]. Sia Ω un dominio esterno di R^n, $n\geq 3$, con $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $0<\alpha<1$. Supponiamo che esistano $R,\delta>0$ tali che

$$(2.1)\qquad \partial\Omega \subset \{R-\delta<|x|<R+\delta\}$$

Sia G la funzione di Green per Ω, relativamente all'operatore $-\Delta+1$, prolungata su $R^n \times R^n$ come nella (1.5). Indichiamo inoltre con G_1 la corrispondente funzione di Green per

$$\Omega_R = \{x \quad R^n \;\big|\; |x| > R\}.$$

Vogliamo determinare una soluzione positiva w del problema

$$(2.2) \qquad \begin{cases} (-\Delta+1)\, w = f(w) & \text{in } \Omega \\ w = 0 \ \text{ su } \partial\Omega\,, & w \in Y \end{cases}$$

come punto fisso, non banale, dell'operatore G:

$$(2.3) \qquad w(x) = \int_{R^n} G(x,y) f(w(y))dy.$$

Seguendo Coffman e Marcus ([CM]) poniamo

$$(2.4) \qquad g = G - G_1 \quad e \quad v = w - u$$

dove u è una soluzione positiva del problema radiale

$$(2.5) \qquad \begin{cases} (-\Delta+1)u = f(u) \ \text{in } \Omega_R \\ u = 0 \ \text{ in } \partial\Omega\,, \quad u(x) \to 0 \ \text{ per } |x| \to +\infty. \end{cases}$$

Ipotesi standard su f, che preciseremo piũ avanti, garantiscono che (2.5) ha effettivamente soluzioni positive $u \in Y$(Cfr. [EL]) con queste notazioni la (2.3) pu essere scritta nel modo seguente

$$v(x) + u(x) = \int_{R^n} g(x,y) f(w(y))dy + \int_{R^n} G_1(x,y) f(w(y))dy$$

Supponiamo ora

$$(2.6) \qquad f \in C^2(R,R)$$

Allora

$$(2.7) \qquad f(w(y)) = f(u(y)) + f'(u(y))v(y) + N(x,v(x))$$

dove

$$(2.8)\qquad N(x,v(x)) = O(v^2(x)) \quad \text{per} \quad v \to 0, \text{ uniformemente su } R^n.$$

Pertanto

$$v(x)+u(x) = \int_{R^n} g(x,y)f(w(y))dy + \int_{R^n} G_1(x,y)(f(u(y)) + f'(u(y))v(y)+N(y,v(y)))dy$$

e quindi, poichè

$$u(x) = \int_{R^n} G_1(x,y)f(u(y))dy,$$

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} v(x) - \int_{R^n} G_1(x,y)\, f'(u(y))v(y)dy &= \\ = \int_{R^n} g(x,y)f(w(y))dy &+ \int_{R^n} G_1(x,y)N(y,v(y))dy \end{aligned}$$

Scriveremo (2.9) nel modo seguente

$$(2.10)\qquad Tv = Sv.$$

Ora, fissato $\varepsilon_1>0$ esiste $\delta>0$ tale che (Cfr. (2.1) e (2.4))

$$\sup_{x\in R^n} e^{|x|^2} \int_{R^n} |g(x,y)|e^{-|y|/2}\, dy \le \varepsilon_1.$$

Allora, tenendo conto anche della (2.8),

$$\|Sv\|_y \leq C(\|v\|_y^2 + \varepsilon_1 \|w\|_y) \leq C(\|v\|_y^2 + \varepsilon_1(\|u\|_Y + \|v\|_Y))$$

e quindi, se $\|v\| \leq \rho$ e $\varepsilon_1 = \rho^2$,

$$\|Sv\|_Y \leq C\rho^2(1+\|u\|_Y + \rho)$$

Fissato quindi $\varepsilon>0$ esiste $\rho>0$ tale che

$$\text{(2.11)} \qquad \|Sv\|_y \leq \varepsilon\rho \quad \text{se} \quad \|v\| \leq \rho$$

e se δ (nella (2.1)) è convenientemente piccolo.

Supponiamo ora che l'operatore T sia invertibile. Ciò equivale a supporre che

$$\text{(2.12)} \qquad \begin{cases} \lambda = 1 \text{ non è un autovalore del problema} \\ (-\Delta+1)v = \lambda f'(u)v \quad \text{in} \quad \Omega_R \end{cases}$$

(si noti che T = I + operatore compatto). Allora (2.10) è equivalente alla seguente

$$\text{(2.13)} \qquad v = T^{-1}\, Sv$$

Dalla (2.11), scegliendo ε sufficientemente piccolo, si trae

$$\|T^{-1}Sv\|_Y \leq \rho \quad \text{se} \quad \|v\|_Y \leq \rho$$

Ma allora, poichè S è compatta (come si verifica facilmente), $T^{-1}S$ ha un punto fisso v. Quindi v è soluzione di (2.13) e, di conseguenza, w = u+v è soluzione di (2.2).

La positività di w segue poi da quella di v, scegliendo

la costante δ in (2.1) convenientemente piccola.

Il metodo ora illustrato fornisce una soluzione positiva di (2.2) *se* vale (2.12). Coffman e Marcus hanno provato, nel caso di $n = 3$ e di f verificante oltre alla (2.6), le seguenti ipotesi:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} f(o)=0\ ,\ f(t)>0 \text{ per } t>0,\quad f(t) = O(|t|^{1+\varepsilon_o}) \text{ per } t\to 0, \\ tf'(t) \geq (1+\varepsilon_2)f(t) \text{ per } t > 0,\quad \varepsilon_o,\varepsilon_2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} f \text{ si prolunga analiticamente sull'aperto} \\ \{z\in C \ /\ \mathrm{Re}z > -\sigma\ ,\ |I_m z| < \sigma\}\ ,\ \sigma>0 \text{ opportuno} \end{cases}$$

il seguente risultato: esiste un insieme E, al *più numerabile,* $E\subset R^+$, tale che la condizione (2.12) è verificata per ogni $R\notin E$.

§ 3. In questo paragrafo esporremo, molto succintamente, un risultato di Benci e Cerami [BC] relativo all'esistenza di soluzioni positive del problema

$$\text{(3.1)}\quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u \quad \text{in } \Omega \\ u\in H^1_o(\Omega) \end{cases}$$

dove Ω è un dominio esterno di R^n, $n \geq 3$, e $2<p<\frac{2n}{n-2}$. In [BC] si ricercano soluzioni di (3.1) come punti critici del funzionale

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx$$

dove

$$\|u\|^2 = \int_{R^n} (|Du|^2 + \lambda u^2)dx$$

(in questo ultimo integrale, se $u \in H_0^1(\Omega)$, conveniamo di porre $u(x) = 0$ per $x \notin \bar{\Omega}$).

La difficoltà principale che si incontra affrontando (3.1) con tecniche variazionali, risiede nel fatto che il funzionale I non verifica la condizione di Palais-Smale ad ogni livello $c \in R^+$, a causa della mancanza di compattezza dell'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L_p(\Omega)$ con $2<p<\frac{2n}{n-2}$. Benci e Cerami riescono tuttavia ad individuare dei livelli $c \in R^+$ ai quali I verifica la condizione $(PS)_c$ nel cono positivo di $H_0'(\Omega)$:

$(PS)_c^+$ $\begin{cases} I(u_m) \to c, u_m \geq 0 \\ \|dI(u_m)\| \to 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ (u_m) ha una sottosuccessione convergente fortemente in $H_0'(\Omega)$.

Il procedimento è il seguente. Se poniamo

$$M = \min\{\|u\|^2 / u \quad H^1(R^n) \quad , \int_{R^n} |u|^p dx = 1\}$$

esiste una funzione $v \in H^1(R^n)$, $v \geq 0$, che realizza tale minimo (Cfr. [BL]). Una semplice applicazione del teorema di Lagrange-Ljusternik permette di verificare che, posto $u = M^{1/p-2}v$, allora

(3.2) $\qquad -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u$

Inoltre

(3.3) $$I^*(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{R^n} |u|^p dx = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})M^{p/p-2} \equiv M_p$$

Sia ora $c \in]M_p, 2M_p[$ e sia (u_m) una successione in $H_o^1(\Omega)$ tale che: $u_m \geq 0$ e

$$I(u_m) \to c \ , \quad \|dI(u_m)\| \to 0 \quad \text{per} \quad m \to \infty$$

Allora ([BC], Lemma 3.1) esiste una sottosuccessione di (u_m), che indicheremo ancora con (u_m), tale che

$$u_m(x) = u_m^{(o)}(x) + \sum_{j=1}^{k} u_m^{(j)}(x - y_m^{(j)})$$

con $k \in N \cup \{o\}$ indipendente da m, $y_m^{(j)} \to \infty$ per $m \to \infty$ e:

(i) $u_m^{(o)} \to u^{(o)}$ in $H_o^1(\Omega)$

(ii) $u_m^{(j)} \to u^{(j)}$ in $H_o^1(R^n)$

(iii) $u^{(o)} \geq 0$ è soluzione di (3.1)

(iv) $u^{(j)} \geq 0$ è soluzione di

(3.4) $$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{in } R^n \\ u \in H^1(R^n) \end{cases}$$

(v) $$c = I(u^{(o)}) + \sum_{j=1}^{k} I^*(u^{(j)})$$

Ma ora ([MS] e [KK]) il problema (3.3) ha al più una soluzione $\bar{u} \geq o$, $\bar{u} \neq 0$. Allora

(3.5) $$c = I(u^{(o)}) + kI^*(\bar{u}) \quad , \quad \bar{u} = u^{(1)} = \ldots u^{(k)}$$

Ma, per la (3.3)

$$I^*(\bar{u}) = M_p \quad \text{se} \quad \bar{u} \neq 0$$

Dalla (3.5) e dalla condizione

$$M_p < c < 2M_p$$

si ricava $k = 0$ e $I(u^{(o)}) \neq 0$. In particolare $u^{(o)} \neq 0$ e (u_m) *converge fortemente ad* $u(o)$.

In [BC] viene poi provato che esiste, effettivamente, almeno un $c \in]M_p, 2M_p[$ tale che

$$\{u \in H_0^1(\Omega) / I(u) = c\} \neq \emptyset,$$

purchè *diam* $(R^n \backslash \Omega) < \delta$, con $\delta > 0$ opportuno.

A questo punto, le usuali tecniche variazionali per la determinazione di punti critici, consentono di provare, in modo standard, il seguente

<u>Teorema 3.1.</u> Esiste $\delta > 0$ tale che, se $\text{diam}(R^n \backslash \Omega) < \delta$ allora il problema (3.1) ha almeno una soluzione positiva.

BIBLIOGRAFIA

[BC] V. BENCI-G. CERAMI, Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domain, Arch. Rat. Mech. and An. 99 (1987) 283-300.

[BL] H. BENESTYCKI-P.L. LIONS, Non linear scalar field equations, Arch. Rat. Mech. and An. 82 (1983) 313-346.

[CM] C.V. COFFMAN-M.M. MARCUS, Superlinear elliptic Dirichlet problems in almost spherically symmetric exterior domains, Arch. Rat. Mech. and An. 96 (1986) 167-197.

[EL] M.J. ESTERBAN-P.L. LIONS, Existence and non-existence results for semi-linear elliptic problem in unbounded domains, Proc. Royal Edinbourgh Soc. 93 (1982) 1-14.

[KK] K. KWONG, Preprint.

[MS] K.Mc-LEOD-J. SERRIN, Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u+f(u)=0$ in R^n, Arch. Rat. Mech. and An. 99 (1987) 115-145.

[S] D.H. SATTINGER, Topics in stability and bifurcation theory, Lecture Notes in Math. 309 (1973), Springer-Verlag.